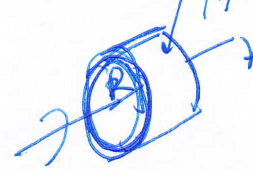
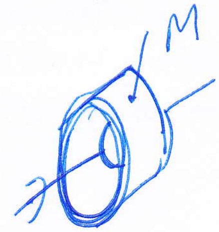
เฉลยการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง

ข้อ 1



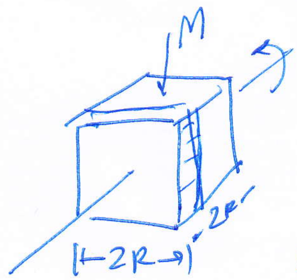
ทรงกระบอกตัน

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



ทรงกระบอกกลวง

$$I = MR^2$$



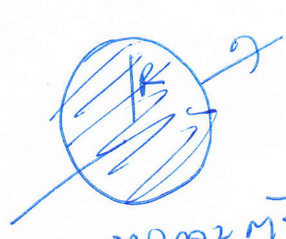
พิจารณาเป็นแผ่นบางๆ หลายอัน หมุนรอบแกนหมุน

แต่ละแผ่นมีโมเมนต์ความเฉื่อย I_i

$$I_i = \frac{1}{12}m_i\left[(2R)^2 + (2R)^2\right]$$

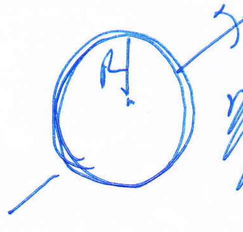
$$= \frac{m_i}{12}4\left[R^2 + R^2\right] = \frac{8}{12}m_i R^2$$

$$I = \Sigma I_i = \frac{8}{12}\Sigma m_i R^2 = \frac{2}{3}MR^2.$$



$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

ทรงกลมตัน



~~ทรงกลมกลวง~~

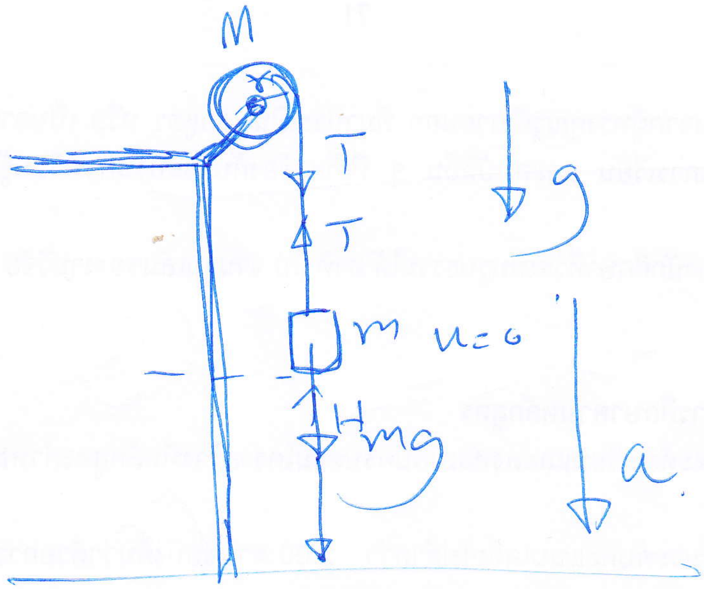
ทรงกลมกลวง

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$

∴ ทรงกลมตันจะมีค่า I น้อยที่สุด

#

5.2



ที่มวล $m \Rightarrow mg - T = ma$ —— (1)

ที่ล้อ $M \Rightarrow \tau = Tr = I\alpha$

แต่ $a = r\alpha$ และ $\alpha = \frac{a}{r}$, $I = \frac{1}{2}M\cancel{r}^2$

จะได้ $Tr = \frac{1}{2}Mr^2\frac{a}{\cancel{r}} = \frac{Mra}{2}$ $\cancel{m}$

$$T = \frac{Ma}{2} \quad \text{——} \quad (2)$$

แทนค่าใน (1) จะได้

$$mg - \frac{Ma}{2} = ma$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)a = mg$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} = \left[\frac{1}{1 + \frac{M}{2m}}\right]g \quad \#$$

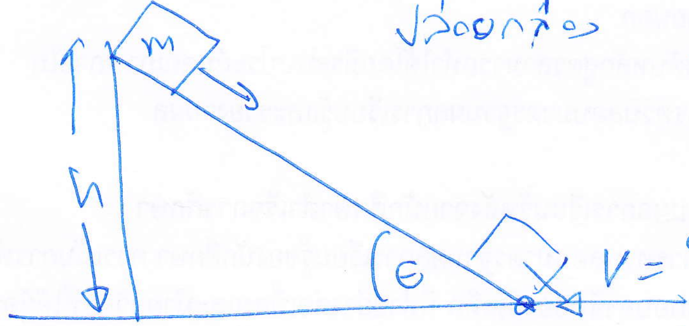
(5.3)

$$v^2 = u^2 + 2as$$
$$= 0 + 2aH$$
$$= 0 + 2\left[\frac{1}{1+\frac{M}{2m}}\right] gH$$

$$v = \sqrt{2gH\left[\frac{1}{1+\frac{M}{2m}}\right]} \quad \#$$

(5.4)

ปล่อยกล่อง



$$E_1 = E_2$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{——— (1)}$$

ถ้าปล่อย ทรงกลมตัน $I = \frac{2}{5}mr^2$

$$E_1 = E_2$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad \text{——— (2)}$$

ถ้าเป็นทรงกลมกลวง $I = \frac{2}{3} m r^2$

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m r^2\right)\frac{v^2}{r^2}$$

$$= \frac{5}{6} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{6}{5} g h} \qquad (3)$$

ถ้าเป็นทรงกระบอกตัน $I = \frac{1}{2} m r^2$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\frac{v^2}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m v^2$$

$$= \frac{3}{4} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g h} \qquad (4)$$

ถ้าเป็นทรงกระบอกกลวง $I = m r^2$

$$\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m r^2\left(\frac{v^2}{r^2}\right)$$

$$= m v^2$$

$$v = \sqrt{g h} \qquad (5)$$

<u>จะเห็นว่า</u> ทรงกระบอกกลวงจะมีความเร็วน้อยที่สุด #

5.5

$$\omega = 108 \text{ rad/s}$$
$$\Delta\theta = 212 \text{ rad}$$
$$\Delta t = 3 \text{ s}$$, α [illegible]

(1) $\omega_0 = ?$

on $\omega = \omega_0 + \alpha t$

[illegible] $\Delta\theta = \frac{(\omega + \omega_0)\Delta t}{2}$

$$212 = \frac{(108 + \omega_0)\times 3}{2}$$

$$424 = 3(108 + \omega_0)$$

$$\omega_0 + 108 = \frac{424}{3} = 141.33$$

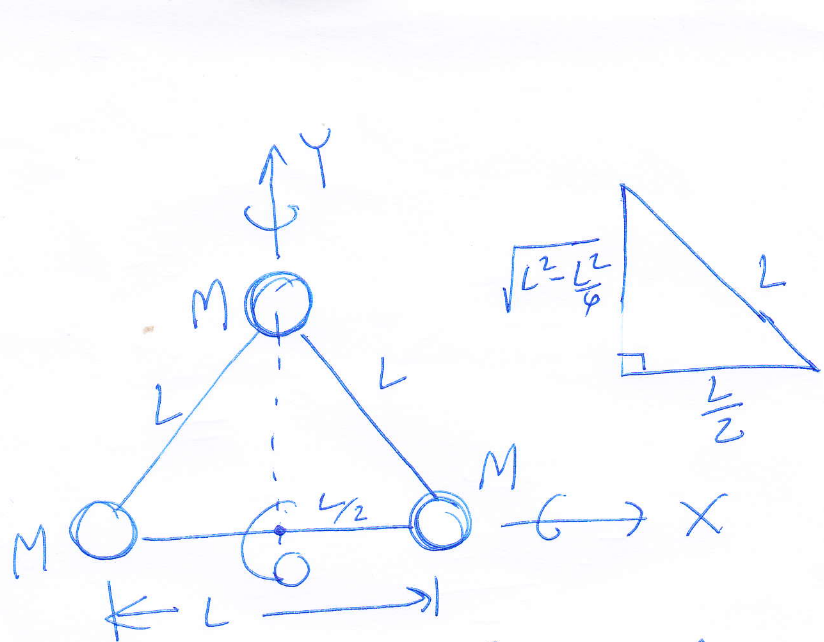
$$\omega_0 = 141.33 - 108 = 33.33 \text{ rad/s}$$

(2) ein $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$108 = 33.33 + \alpha(3)$$

$$\alpha = 24.89 \text{ rad/s}$$ #

5.6



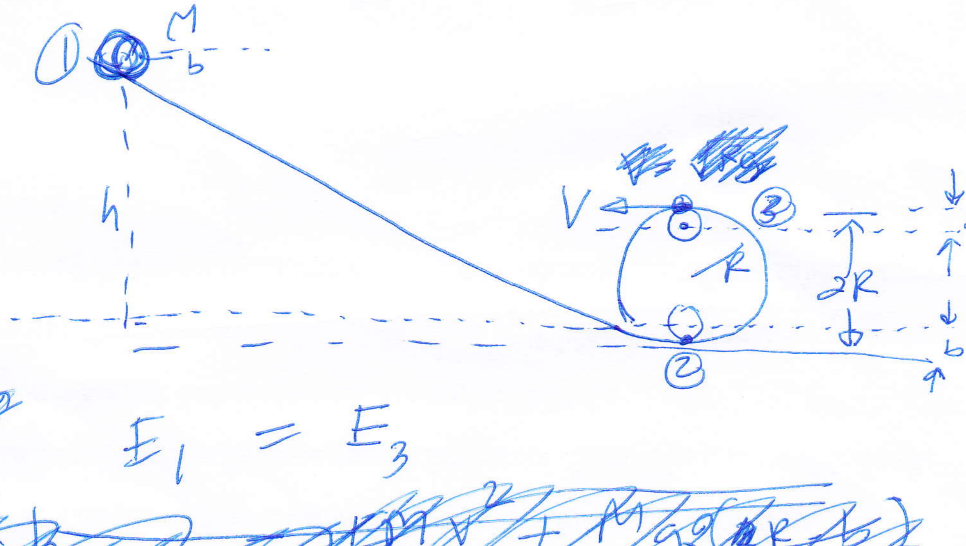
$$I_y = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2ML^2}{4} = \frac{ML^2}{2}$$

$$I_x = M\left(\frac{3L^2}{4}\right) = \frac{3ML^2}{4}$$

$$I_z = \frac{3ML^2}{4} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (M)\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{4}ML^2 \quad \text{————} \quad \#$$

5.7



$$E_1 = E_3$$

$$\cancel{Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg2(2R-b)}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + Mg(2R-2b) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

แต่ $\omega = \frac{v}{b}$ และ $I = \frac{2}{5}Mb^2$

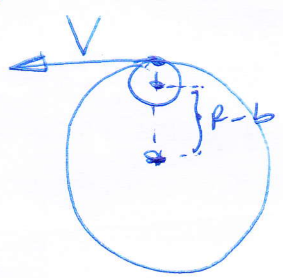
$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + 2Mg(R-b) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mb^2\right)\frac{v^2}{b^2}$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + 2g(R-b) + \frac{1}{5}v^2$$

$$gh = \frac{7}{10}v^2 + 2g(R-b)$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}(h-2R-2b)g} \quad \text{—— } 1$$

ที่จุดที่ 3 เคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวดิ่ง



$$\overset{0}{\cancel{T}} + Mg = \frac{Mv^2}{(R-b)}$$

หรือ $v = \sqrt{(R-b)g}$ —— 2

แต่ 1 = 2 จะได้

$$\frac{10}{7}(h-2R-2b)g = (R-b)g$$

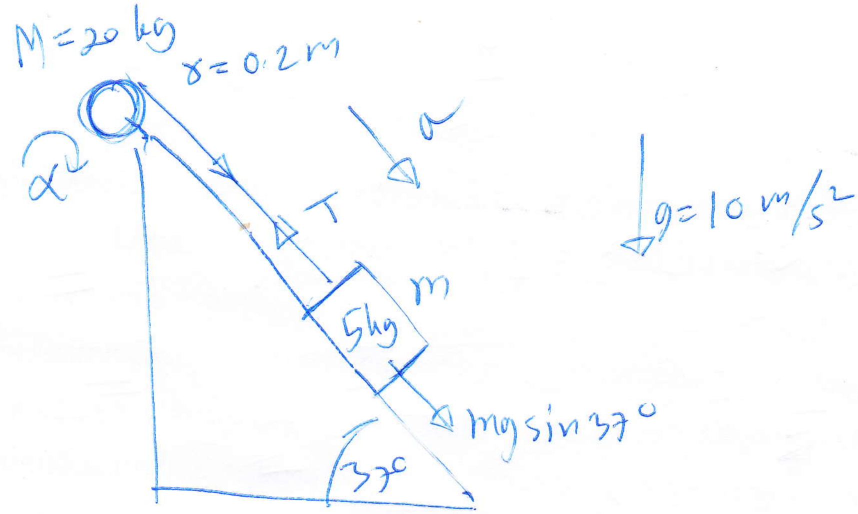
$$\frac{10h}{7} - \frac{20}{7}(R-b)g = (R-b)g$$

$$\Rightarrow \frac{10h}{7} = \left(\frac{20}{7}+1\right)(R-b)g$$

$$= \frac{27}{7}(R-b)g$$

$$h = \frac{27}{10}(R-b)g \quad \text{—— } \#$$

5.8



ที่มวล m $\Rightarrow$ $\Sigma F = ma$

$$mg\sin 37^\circ - T = ma \quad \text{——} \; ①$$

ที่มวล M $\quad \tau = Tr = I\alpha$

จาก $I = \frac{1}{2}Mr^2$, $\alpha = \frac{a}{r}$

$$\Rightarrow \quad Tr = \frac{1}{2}Mr^2\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$T = \frac{Ma}{2} \quad \text{——} \; ②$$

แทน ② ลง ①

$$mg\sin 37^\circ - \frac{Ma}{2} = ma$$

$$a\left(m + \frac{M}{2}\right) = mg\sin 37^\circ$$

$$a = \frac{mg\sin 37^\circ}{\left(m + \frac{M}{2}\right)} \quad \text{——} \; ③$$

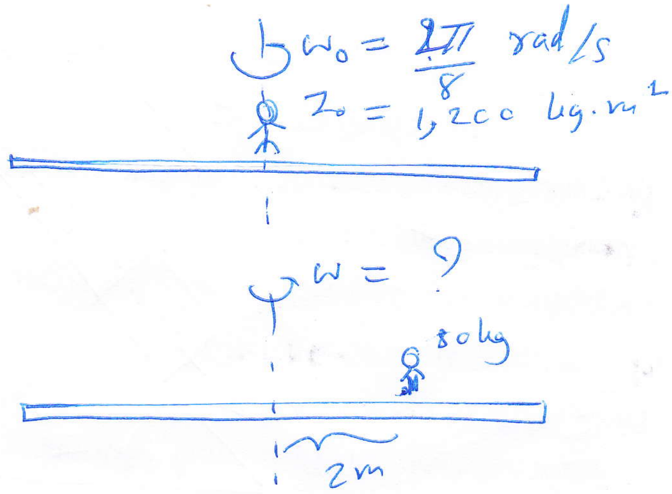
แทนค่า ③

ก $\quad a = \dfrac{50 \times \frac{3}{5}}{(5+10)} = \dfrac{30}{15} = 2 \ m/s^2$

ข $\quad \alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2}{0.2} = 10 \ rad/s^2$

ค $\quad T = \dfrac{Ma}{2} = \dfrac{20 \times 2}{2} = 20 \ N$ #

5-9



$I = I_0 + I_{\text{คน ระยะทาง}}$

$I_{\text{คน}} = 80 \times 4 = 320$ kg·m²

$I = 1{,}200 + 320 = 1520$ kg·m²

จากกฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

$I_0\omega_0 = I\omega$

$1200 \times \frac{2\pi}{8} = 1520\,\omega$

$\omega = \frac{1200}{1520} \times \frac{2\pi}{8} = \frac{15\pi}{76}$ rad/s

#